Электронная почта [n a t a l i 009@mail.ru](mailto:natali009@mail.ru)

I. Прочитайте следующее:

Допустим, нам необходимо решить уравнение

$$3 \cdot (2x - 5) = 2x + 5.$$

Преобразуем данное уравнение, выстраивая цепочку уравнений и стараясь получить уравнение вида $a \cdot x = b$, т.е. линейное уравнение

$$6x - 15 = 2x + 5, \quad 6x - 2x = 5 + 15, \quad 4x = 20.$$

Откуда получаем, что 5 - корень уравнения. Причём, как последнего уравнения, так и любого из уравнений данной цепочки, так как они являются равносильными уравнениями. По сути, решением уравнения и является выстраивание подобных цепочек уравнений.

Однако при преобразовании уравнений (и неравенств в том числе) далеко не всегда легко получить им равносильные уравнения. И как быть тогда?

Изучением этих крайне важных вопросов нам и предстоит заняться.

Мы вернёмся к целому ряду понятий, связанных с решением уравнений, с которыми вы неплохо знакомы, и посмотрим на них как бы несколько иначе, глубже, обобщим и дополним рядом важных и принципиальных положений.

2. Запишите в тетради следующее:

1) **Определение.** Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $h(x) = p(x)$ называют равносильными, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2x - 4) = 0$ равносильны; равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\sqrt{x} = -2$ - они не имеют корней.

2) **Определение.** Если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$
(1)
является в то же время корнем уравнения $h(x) = p(x)$

(2),
то уравнение (2) называется следствием уравнения (1).

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень 5, уравнение $x^2 - 25 = 0$ имеет корни ± 5 . Так как корень уравнения $x - 2 = 3$ является корнем

уравнения $x^2 - 25 = 0$, то уравнение $x^2 - 25 = 0$ является следствием,, уравнения $x - 2 = 3$.

Следовательно, **два уравнения называют равносильными** тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

3) Если в ходе преобразований, при переходе от одного из уравнений к уравнению-следствию, мы неуверенны в равносильности выполняемого перехода, то у последнего уравнения могут появиться **посторонние корни** в отношении исходного уравнения. Поэтому все полученные корни уравнения- следствия необходимо проверить, подставляя их в исходное уравнение. Тем самым, **проверка найденных корней уравнения является** не проверкой верности выполненных технических преобразований, а неотъемлемой частью, этапом решения уравнения.

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному уравнению.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень, то получится уравнение, равносильное данному уравнению.

Теорема 3. Показательное уравнение $\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)}$ (где $\alpha > 1, \alpha \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Определение. Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или ОДЗ переменной уравнения называется множество тех значений x , при которых одновременно имеют смысл обе части уравнения $f(x) = g(x)$.

Теорема 4. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое имеет смысл всюду в области определения (ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$ и при этом нигде в этой области $h(x) \neq 0$, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $h(x) \cdot f(x) = h(x) g(x)$ равносильны.

То есть, мы можем обе части уравнения умножать или делить на одно и то же отличное от нуля число, не нарушая при этом равносильности уравнений.

Теорема 5. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны на ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же степень n получится уравнение $f^n(x) = g^n(x)$, равносильное исходному уравнению.

Теорема 6. Если $f(x) > 0, g(x) > 0$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

5) Рассмотрим применение теоретических положений на практике. Пусть нам дано уравнение $x - 1 = 3$, корень которого равен 4.

а) Умножив обе части уравнения на выражение $x - 2$, получим уравнение $(x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$. Решим полученное уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = 3x - 6, \quad x^2 - 6x + 8 = 0, \quad x_1 = 2, x_2 = 4.$$

То есть, уравнение-следствие имеет два корня 2 и 4 , причём, 2 -посторонний корень для исходного уравнения. Каким образом у исходного уравнения появился посторонний корень? - Если бы мы вначале преобразовали исходное уравнение к виду $x - 4 = 0$. За тем домножили обе части уравнения на $x - 2$. То получили бы уравнение $(x - 4)(x - 2) = 0$, которое равносильно совокупности уравнений $\begin{cases} x - 4 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$. Тогда понятно, что уравнение $x - 2 = 0$, по отношению к исходному уравнению $x - 4 = 0$, является посторонним уравнением, отсюда и появление постороннего корня. Фактически мы умножили обе части исходного уравнения на выражение $x - 2$, допуская при этом его равенство нулю, что невозможно по теореме 4.

б) Возведём в квадрат обе части уравнения $x - 1 = 3$. Получим уравнение-следствие $(x-1)^2 = 9$. Откуда $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Вновь у уравнения-следствия появляется посторонний корень по отношению к исходному уравнению. Преобразовав уравнение $(x-1)^2 = 9$ к виду $(x-4)(x+2)=0$, получаем постороннее уравнение $x + 2 = 0$ и посторонний корень -2 . Нарушено условие теоремы 5: возводя в квадрат, мы «забыли», что при возведении в квадрат должно выполняться условие $x - 1 > 0$.

в) Рассмотрим уравнение $\ln(2x - 4) = \ln(3x - 5)$. Потенцируя, получим уравнение $2x - 4 = 3x - 5$. Откуда $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что 1 является посторонним корнем для исходного уравнения. В данном случае произошло не появление постороннего уравнения, а расширение ОДЗ исходного уравнения. У исходного уравнения ОДЗ: $(2; + \infty)$, у полученного уравнения ОДЗ - вся числовая прямая. Тем самым не нарушены требования теоремы 6.

б) **Выводы.** Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, значит, необходимо обязательное выполнение проверки всех найденных корней, если: расширилась ОДЗ уравнения; возводились в одну и ту же чётную степень обе части уравнения; выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и тоже выражение с переменной.

3) Отправьте конспект на адрес natali009@mail.ru