

Тема: Иррациональные уравнения

Задание:

1. Разобрать лекцию. Записать в тетрадь алгоритм решения иррациональных уравнений.
2. Выполнить самостоятельную работу.(см.ниже) – на «3» -1 вариант на выбор, На «4» или «5» - оба варианта!!!
3. Лекция.

Что такое уравнение? (Уравнение – это равенство двух алгебраических выражений).

Что называется корнем уравнения? (Корнем уравнения называется, то значение переменной, при котором данное уравнение обращается в верное равенство).

Что значит решить уравнение? (Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет корней).

Здесь записаны уравнения. Посмотрите внимательно и определите, какие уравнения вы уже умеете решать, а какие у вас вызывают затруднения?

$$\sqrt{x^2 - 5} = 2$$

$$x+5=2x-8$$

$$\sqrt{x+2} = x$$

$$x^2+3x-1=0$$

$$\sqrt{x} = 1 - x^2$$

$$\frac{3+x}{x-4} + \frac{2x}{x+2} = 0$$

Такие уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называются **иррациональными уравнениями**.

Итак, тема нашего урока: “**Иррациональные уравнения**”.

Цель урока: Отработать алгоритм решения простейших иррациональных уравнений, рассмотреть некоторые способы решения более сложных иррациональных уравнений.

Изучение нового материала.

Объясняю алгоритм решения и оформления иррациональных уравнений.

1. Решаю уравнение. $\sqrt{x^2 - 5} = 2$

Решение.

Основной метод решения иррациональных уравнений – это метод возведения в одинаковую степень обеих частей уравнения. Но при этом мы можем получить неравносильное уравнение, поэтому в конце обязательно нужно сделать проверку.

1. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим
 $x^2 - 5 = 4$; $x^2 = 9$; $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

2. Проверка.

При $x = -3$ $\sqrt{9-5} = 2$, $\sqrt{4} = 2$, $2 = 2$, верное равенство.

При $x = 3$ $\sqrt{9-5} = 2$, $\sqrt{4} = 2$, $2 = 2$, верное равенство.

3. Следовательно, числа -3 и 3 являются решениями данного иррационального уравнения.

Ответ: -3 ; 3 .

А как бы вы решали вот такое уравнение $\sqrt{x+2} = x$

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $x+2 = x^2$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

– Давайте проверим, являются ли полученные значения переменной решениями данного уравнения? Пишем ПРОВЕРКА!

Проверка.

При $x = -1$ $\sqrt{-1+2} = -1$, $1 = -1$, равенство неверно.

При $x = 2$ $\sqrt{2+2} = 2$, $2 = 2$, равенство верно.

Следовательно, число 2 является решением данного уравнения.

Ответ: 2.

Итак, ребята, мы получили, что только одно значение переменной является решением данного уравнения. Это число 2. Число -1 в данном случае называется **посторонним корнем**.

важна ли проверка в иррациональных уравнениях, решаемых таким способом и почему?

Ответ: Да, так как могут появиться посторонние корни.

Возможность появления посторонних корней обязывает нас быть очень внимательными при решении иррациональных уравнений.

Мы рассмотрели один из способов решения иррациональных уравнений. Это возведение обеих частей уравнения в квадрат. А если переменная находится под знаком корня 3-ей, 4-ой и т.д. степени. Тогда как быть?

Ответ: Возвести обе части уравнения в 3-ю, 4-ю и т.д. степень.

сформулировать общий способ решения иррациональных уравнений?

Значит одним из способов решения иррациональных уравнений является возведение обеих частей уравнения в степень, равную показателю степени корня. И не забыть, при этом сделать проверку, отсеяв, возможные посторонние корни.

существует еще один способ решения иррациональных уравнений- способ введения новой переменной.

Я предлагаю решить иррациональное уравнение вида: $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}} + \sqrt{\frac{2x+3}{3x-2}} = 2,5$

Решение: для решения введем обозначение: $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}} = a > 0$. Тогда $\sqrt{\frac{2x+3}{3x-2}} = \frac{1}{a}$

И наше иррациональное уравнение примет вид: $a + \frac{1}{a} = 2,5$ т.е получили дробно-рациональное уравнение.

Чтобы его решить, приведем его к квадратному виду, т.е. $a^2 - 2,5a + 1 = 0$

Квадратные уравнения мы решать умеем.

$D = 2,25$

$$a_1 = \frac{2,5+1,5}{2} = 2 \quad a_2 = \frac{2,5-1,5}{2} = \frac{1}{2}$$

1) Возведем обе части уравнения $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}} = 2$ в квадрат, и получим: $\frac{3x-2}{2x+3} = 4$

или $3x-2=8x+12$ Решая уравнение получим: $x_1 = -2,8$

2) Обе части уравнения $\sqrt{\frac{3x-2}{2x+3}} = \frac{1}{2}$ возведем во вторую степень. Получим: $\frac{3x-2}{2x+3} = \frac{1}{4}$

Или $12x-8=2x+3$, $x_2 = 1,1$

Проверка:

Подставим $x_1 = -2,8$: $\sqrt{\frac{3 \cdot (-2,8) - 2}{2 \cdot (-2,8) + 3}} + \sqrt{\frac{2 \cdot (-2,8) + 3}{3 \cdot (-2,8) - 2}} = \sqrt{\frac{-10,4 - 2}{-5,6 + 3}} + \sqrt{\frac{-5,6 + 3}{-10,4}} = \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$

$x = -2,8$ удовлетворяет данное иррациональное уравнение

Подставим $x_2 = 1,1$: $\sqrt{\frac{3 \cdot 1,1 - 2}{2 \cdot 1,1 + 3}} + \sqrt{\frac{2 \cdot 1,1 + 3}{3 \cdot 1,1 - 2}} = \sqrt{\frac{1,3}{5,2}} + \sqrt{\frac{5,2}{1,3}} = \frac{1}{2} + 2 = 2,5$

$x_2 = 1,1$ также удовлетворяет данное иррациональное уравнение.

Ответ: -2,8; 1,1

Иногда при решении иррациональных уравнений можно найти область допустимых значений переменной. Затем достаточно провести проверку только для тех, значений переменной, которые входят в найденную область. Значения, не принадлежащие этому множеству, будут посторонними корнями.

Решим уравнение вида: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$. вначале определим область допустимых значений переменной x . так как каждый радикал является квадратным корнем, получаем

следующую систему неравенств $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$. Решение каждого неравенства

покажем на координатной прямой. Областью допустимых значений переменной x является промежуток $[3; +\infty)$. Таким образом, корни данного иррационального уравнения должны принадлежат данному промежутку.

Теперь решим данное уравнение $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$.

$$(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3})^2 = (2\sqrt{x})^2$$

$$2x+1+2\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{x-3} + x-3 = 4x \quad \text{или} \quad 2 \cdot \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{x-3} = x+2$$

$$4(2x+1)(x-3) = x^2 + 4x + 4$$

$$8x^2 + 4x - 24 - 12 = x^2 + 4x + 4$$

$$7x^2 - 24 - 16 = 0$$

$x_1 = 4$ $x_2 = -\frac{4}{7}$. Второй корень не входит в область допустимых значений.. поэтому он является посторонним корнем. Ответ: 4

И подведем итоги. Т.е. составим алгоритм решения иррационального уравнения

Алгоритм решения уравнений

1. Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путем возведения в степень обеих частей уравнения или замены переменной.
2. При возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании указанного метода следует проверить все найденные корни подстановкой в исходное уравнение.
3. Иногда удобнее решать иррациональные уравнения, определив область допустимых значений неизвестного и используя равносильные переходы.

Закрепление изученного материала

а) $\sqrt{x+2} = x$.

Решение:

Возведем обе части уравнения в квадрат: $x+2 = x^2$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Проверка: 1) $x = -1$, тогда $\sqrt{-1+2} = -1$, $1 = -1$ ложно;

2) $x = 2$, тогда $\sqrt{2+2} = 2$, $2 = 2$ верно.

Ответ: $x = 2$.

б) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 - 2x = 0$.

Решение:

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1, \quad x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2, \quad x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1,$$

$$x(x-3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3.$$

Проверка: 1) $x_1=0$, то $\sqrt{0^2 + 5 * 0 + 1} + 1 - 2 * 0 \neq 0$, значит, $x_1=0$ не удовлетворяет уравнению.

2) $x_2=3$, тогда $\sqrt{3^2 + 5 * 3 + 1} + 1 - 2 * 3 = 0$. Значит, $x=3$ – корень уравнения.

Ответ: $x=3$.

в) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$.

Решение:

возведя обе части уравнения в квадрат, получим $2x-3 = x-2$, $x = 1$.

Проверка: $\sqrt{2 * 1 - 3} = \sqrt{1 - 2}$. Обе части уравнения не имеют смысла.

Ответ: нет корней.

V. Самостоятельная работа.

Решить уравнение

1 вариант

1) $\sqrt{x+1} = x-5$

2) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x^2-2x+4}$

2 вариант

1) $\sqrt{2x-1} = x-2$

2) $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{x+9}$