Болдова Н.П. Задание группам 101,102,103математика. Адрес эл. почты: nadezda_boldova@mail.ru

Тема 1.

Равносильность уравнений, неравенств, систем.

Указания к выполнению работы.

1.Изучите теоретический материал, законспектируйте.

2. Выполните упражнения для самостоятельного решения.

Теоретический материал .

Равносильность уравнений. Теоремы о равносильности уравнений

Определение 1.

Два уравнения с одной переменной $f(x)=g(x)$ **и** $p(x)=h(x)$ **называют равносильными, если множества их корней совпадают.**

Иными словами,

два уравнения называют *равносильными,* если они имеют одинаковые корни, или если оба уравнения не имеют корней.

Определение 2.

Если каждый корень уравнения $f(x)=g(x)$ (1)
является в то же время корнем уравнения $p(x)=h(x)$**,** (2)
то уравнение (2) **называют следствием уравнения** (1)**.**

Пример:

уравнение $(x-2)2=9$ *является следствием уравнения* $x-2=3$.

В самом деле, решив каждое уравнение, получим:

$(x-2)2=9x-2=3$; $x-2=-3$; $x1=5$; $x2=-1$; и $x-2=3$; $x=5$.

Корень второго уравнения является одним из корней первого уравнения, поэтому первое уравнение — следствие второго уравнения.

Очевидно следующее утверждение:

два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа:

Первый этап — *технический.*

На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1)→(2)→(3)→(4)→... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения.*

На этом этапе анализируем, все ли проведённые преобразования были равносильными.

Третий этап — *проверка.*

Если, анализируя преобразования на втором этапе, делаем вывод, что получили уравнение-следствие, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Обрати внимание!

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе, основано на шести теоремах о равносильности.

Теорема 1.

Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2.

Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3.

Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, где $a>0$, $a\neq 1$, равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Определение 3.

Областью определения уравнения $f(x)=g(x)$ **или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной** x**, при которых одновременно имеют смысл выражения** $f(x)$ **и** $g(x)$**.**

Теорема 4.

Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x)=g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0

— то получится уравнение $f(x)h(x)=g(x)h(x)$, равносильное данному.

Следствие теоремы 4.

Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5.

Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же чётную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n=g(x)^n$.

Теорема 6.

Если $f(x)>0$ и $g(x)>0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где $a>0$, $a\neq 1$, равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Примеры:

1) Уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, т.к. каждое из них имеет только один корень x=3.

2) Уравнения $(x-2)(x+5) = 0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, т.к. у них одни и те же корни $x_1 = 2, x_2 = -5$.

3) А вот уравнения $3x = 6$ и $4x^2 = 16$ не равносильны, потому что у первого уравнения корень x=2, а у второго уравнения два корня x=2 и x=-2.

4)Решим уравнение: $\sqrt{x} = x - 2$

Возведем в квадрат обе части уравнения, получим:

$x = (x-2)^2$, которое не будет равносильно исходному уравнению, потому что у этого уравнения два корня $x_1 = 1, x_2 = 4$, а у первоначального уравнения только один корень x=4.

5)   Решим уравнение: $x^2 - 9 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0$

Ответ: $x = \pm 3$

6) Решим уравнение: $(x+3)(x^3 - 27) = 0$

$(x+3)(x-3)(x^2+3x+9) = 0$

$x^2 + 3x + 9 \neq 0$

$D = 9 - 36 = -27 < 0$

$(x+3)(x-3) = 0$

Ответ: $x = \pm 3$

Уравнения 5 и 6 называются равносильными.

Упражнения для самостоятельного решения:

Объясните, почему равносильны уравнения:

а) $x+5 = 2x-3$ и $x-2x+5 = -3$;

б) $\frac{1}{2}x^2+1 = x^3-x$ и $x^2+2 = 2x^3-2x$;

в) $(x+1)^2 = 2x^2$ и $x^2+2x+1 = 2x^2$.

Материалы направлять по адресу: nadezda_boldova@mail.ru

Тема 2.

Решение дробно- рациональных уравнений.

Указания к выполнению работы.
1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом.

Теоретический материал.

Определение : Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называется дробным.

Чтобы решить дробное уравнение, необходимо:
1. найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. решить получившееся целое уравнение;
4. исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

2. Посмотрите учебное видео с примерами решения дробно-рациональных уравнений:

https://youtu.be/mSEsSHjyqOk

3. Выполните упражнения для самостоятельного решения (объяснение дано в видео). Не забывайте делать проверку (в видеоуроке проверка устная, а вам придется ее сделать письменно) и писать ответ к каждому уравнению!!!

Упражнения для самостоятельного решения.

Критерии оценки : На «3»- два уравнения; на «4» - четыре уравнения; на «5»- пять уравнений. Уравнения выполнять по порядку.

1. Решите уравнение: $\frac{3}{2-x} = \frac{2}{5-x}$

2. Решите уравнение: $\frac{24}{x+10} = -x$

3. Решите уравнение: $\frac{x-6}{2} + \frac{x-1}{8} = 2$

4. Решите уравнение: $\frac{x}{x^2-4} - \frac{3}{x+2} = 0$

5. Решите уравнение: $\frac{3}{x^2+4x-5} - \frac{5}{x^2-8x+7} = \frac{2}{x-1}$

Материалы направлять по адресу: nadezda_boldova@mail.ru

Тема 3.
Решение иррациональных уравнений.

Указания к выполнению работы.
1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом. Напишите конспект **без** примеров.

Теоретический материал.

Определение: **Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными.**

Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо эквивалентно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель корня - четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение корня также является неотрицательным (определение корня с четным показателем степени);

2) если показатель корня - нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 3} = 1$
Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат.
$x^2 - 3 = 1$;
Перенесем -3 из левой части уравнения в правую и выполним приведение подобных слагаемых.
$x^2 = 4$;
Полученное неполное квадратное уравнение имеет два корня -2 и 2.
Произведем проверку полученных корней, для этого произведем подстановку значений переменной x в исходное уравнение.

Проверка.

При $x_1 = -2$ $\sqrt{(-2)^2 - 3} = 1$ - истинно:

При $x_2 = -2$ $\sqrt{2^2 - 3} = 1$ - истинно.

Отсюда следует, что исходное иррациональное уравнение имеет два корня -2 и 2.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x - 9} = \sqrt{1 - x}$.

Это уравнение можно решить по такой же методике как и в первом примере, но мы поступим иначе.

Найдем ОДЗ данного уравнения. Из определения квадратного корня следует, что в данном уравнении одновременно должны выполнятся два условия:

а) $x - 9 \geq 0$;

$x \geq 9$;

б) $1 - x \geq 0$;

$-x \geq -1$;

$x \leq 1$.

ОДЗ данного уранения: $x \in \varnothing$.

Ответ: корней нет.

Пример 3. Решить уравнение $x = \sqrt{x+1}$.

Решение.

В этом примере ОДЗ найти легко. ОДЗ этого уравнения: $x \in [-1; \infty)$.

Возведем обе части этого уравнения в квадрат, в результате получим уравнение $x^2 = x + 1$. Корни этого уравнения:

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Произвести проверку найденных корней трудно. Но, несмотря на то, что оба корня принадлежат ОДЗ утверждать, что оба корня являются корнями исходного уравнения нельзя. Это приведет к ошибке. В данном случае иррациональное уравнение равносильно совокупности двух неравенств и одного уравнения:

$x + 1 \geq 0$ **и** $x \geq 0$ **и** $x^2 = x + 1$, из которой следует, что отрицательный корень для иррационального уравнения является посторонним и его нужно отбросить.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. Посмотрите учебное видео с примерами решения иррациональных уравнений:

https://youtu.be/4ALPElcXjHA

https://youtu.be/DThWseoo5DA

https://youtu.be/2WrgNRmTfAs

https://youtu.be/7elu-WHXaCw

3. Выполните упражнения для самостоятельного решения (объяснение дано в видео). Если нет возможности смотреть видео, то используйте примеры решения данные выше. Не забывайте делать проверку или находит ОДЗ и писать ответ к каждому уравнению!!!

Упражнения для самостоятельного решения.

Критерии оценки : На «3»- два уравнения; на «4» - три уравнения; на «5»- четыре уравнений. Уравнения выполнять по порядку.

1. Решите уравнение: $\sqrt{\mathrm{x}-5}=8$

2. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-7}=\sqrt{-2x-6}$

3. Решите уравнение: $\sqrt{2x+9}=x+3$

4. Решите уравнение: $\sqrt{2\mathrm{x}-3}+\sqrt{4\mathrm{x}+1}=4$

Материалы направлять по адресу: nadezda_boldova@mail.ru