

Задание :

1. Прочитать лекцию, записать в тетрадь виды логарифмических уравнений. (оценка «3»)
2. Решить любую систему логарифмических уравнений. (оценка «4» или «5»)

Схема решения логарифмических уравнений

Мы видим, что логарифмическая функция, как и показательная, является *монотонной* (монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$).

Это означает, что мы можем по аналогии с простейшими показательными уравнениями определить способ решения простейших логарифмических уравнений ($a, b > 0, a \neq 1$): $\log_a x = \log_a b \Leftrightarrow x = b$. Однако при этом необходимо помнить, что под логарифмом должно стоять положительное число. Таким образом, при решении логарифмических уравнений необходимо учитывать ОДЗ, а именно: проверять, что все подлогарифмические выражения, а также основания логарифмов являются положительными и основания не равны 1.

Однако можно избежать определения ОДЗ исходного уравнения, выполнив в конце проверку полученных результатов (поскольку мы не сужаем область поиска корней, а расширяем её). В большинстве случаев такой подход облегчает решение логарифмических уравнений.

Таким образом, для *решения простейшего логарифмического уравнения* достаточно привести обе части к одинаковому основанию, а затем приравнять подлогарифмические выражения.

Например: $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 8 \Leftrightarrow x = 8$.

Правда, в данном конкретном случае мы могли воспользоваться и определением логарифма: $x = 2^3 = 8$. Однако продемонстрированный метод более универсальный.

Любое более сложное логарифмическое уравнение решается «выливанием воды из чайника», то есть сведением его различными методами к простейшим.

Виды логарифмических уравнений

1) Простейшие ($\log_2 x = 9$).

2) Простейшие с переменной в основании логарифма ($\log_x 2 = 3$).

- 3) Простейшие с переменной и в основании, и под логарифмом ($\log_x(x+2) = 2$).
- 4) Сводящиеся к простейшим с помощью использования свойств логарифмов ($\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$).
- 5) Сводящиеся к квадратным ($\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$).

Системы логарифмических уравнений

Системы логарифмических уравнений решаются по тем же принципам, что и системы показательных уравнений.

Самые простые системы логарифмических уравнений – это *системы, в которых оба уравнения сводятся к простейшим*. В дальнейшем получается обычная система из двух уравнений с двумя неизвестными, которая решается любым из удобных методов.

Пример такой системы:
$$\begin{cases} \log_2(x+3y) = 2 \\ \log_3 xy = 1 \end{cases}.$$

Ещё один важный тип систем логарифмических уравнений – это *системы, которые сводятся к обычным с помощью замены*. Пример такой системы:
$$\begin{cases} \log_2 x - \log_3 y = 2 \\ 4\log_2 x - 5\log_3 y = 7 \end{cases}.$$

Также существуют системы логарифмических уравнений, которые решаются различными методами.