Болдова Н.П. Задание группам 101,102,103математика. Адрес эл. почты: nadezda_boldova@mail.ru

Задание дано на неделю.

Тема .

Решение показательных уравнений и систем.

Указания к выполнению работы.

1.Изучите теоретический материал, законспектируйте основные моменты.

2. Выполните упражнения для самостоятельного решения.

Теоретический материал .

Определение:

Показательные уравнения – уравнения, в которых переменная входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.

Например, $4^{x-1}=4,$

$5^{x^2-3x}=5^{3x-8},$

$0{,}5^{x+7}\cdot 0.5^{1-2x}=2,$

$16^x-17\cdot 4^x+16=0.$

Простейшим из них является уравнение $a^x=b$, где $a>0$, $a\neq 1$.

1) При $b<0$ и $b=0$ это уравнение, согласно свойству 1 показательной функции, не имеет решения.

2) При $b>0$ используя монотонность функции и теорему о корне, уравнение имеет единственный корень. Для того, чтобы его найти, надо b представить в виде $b=a^c$, $a^x=b^c \Leftrightarrow x=c$ или $x=\log_a b$.

Показательные уравнения путем алгебраических преобразований приводят к стандартным уравнения, которые решаются, используя следующие методы:

1) метод приведения к одному основанию $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).$;
2) метод разложения на множители;
3) метод введения новых переменных;
4) графический метод;
5) метод оценки;
6) показательно – степенные уравнения;
7) показательные с параметром.

Рассмотрим три из них.

1) Метод приведения к одному основанию.

Способ основан на следующем свойстве степеней: если равны две степени и равны их основания, то равны и их показатели, т.е. уравнение надо попытаться свести к виду

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

Примеры. Решить уравнение:

1. $3^x=81;$

Представим правую часть уравнения в виде $81=3^4$ и запишем уравнение, равносильное исходному $3^x=3^4$; $x=4$. Ответ: 4.

2. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$

Представим правую часть уравнения в виде $\left(\frac{3}{7}\right)^{3-5x}$ и перейдем к уравнению для показателей степеней $3x+1=3-5x$; $8x=4$; $x=0{,}5$. Ответ: 0,5.

3. $5^{x^2-3x+2}=1$

Представим правую часть данного уравнения в виде $1 = 5^0$ и перейдем к уравнению для показателей степеней $x^2-3x+2 = 0$, откуда легко получить решения x = 1 и x=2.

Ответ: 1 и 2.

4. $\frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt{5}}=\frac{004^x}{25}$

Заметим, что числа 0,2 , 0,04 , √5 и 25 представляют собой степени числа 5. Воспользуемся этим и преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$\frac{(5^{-1})^{x+0,5}}{5^{0,5}}=\frac{(5^{-2})^x}{5^2}$, откуда $5^{-x-1} = 5^{-2x-2}$ ⇔ - x – 1 = - 2x – 2, из которого находим решение x = -1. Ответ: -1.

5. $3^x = 5$. По определению логарифма $x = \log_3 5$. Ответ: $\log_3 5$.

6. $6^{2x+4} = 3^{3x}.\ 2^{x+8}$.

Перепишем уравнение в виде $3^{2x+4}.2^{2x+4} = 3^{2x}.2^{x+8}$, т.е. $\frac{2^{2x+4}}{2^{x+8}}=\frac{3^{3x}}{3^{2x+4}}$, далее

$2^{2x+4-x-8} = 3^{3x-2x-4}$, т.е. $2^{x-4} = 3^{x-4}$. (Уже ясно, что x = 4). Перепишем уравнение, разделив на $3^{x-4} \neq 0$.

$\frac{2^{x-4}}{3^{x-4}}=1, т.е \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^0$. Отсюда x – 4 =0, x = 4. Ответ: 4.

7. $2\cdot3^{x+1} - 6\cdot3^{x-2} - 3^x = 9$. Используя свойства степеней, запишем уравнение в виде $6\cdot3^x - 2\cdot3^x – 3^x = 9$ далее $3\cdot3^x = 9$, $3^{x+1} = 3^2$, т.е. x+1 = 2, x =1. Ответ: 1.

2). Метод разложения на множители.

1. Решите уравнение: $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $5\cdot5^x-\frac{1}{5}\cdot5^x=24$

Теперь в левой части уравнения вынесем за скобки общий множитель 5^x.

Получим $5^x\cdot\left(5-\frac{1}{5}\right)=5^x\cdot\frac{24}{5}=24$, откуда

$5^x=5 \Leftrightarrow x=1.$

Ответ: 1.

2. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

Решение. Вынесем за скобки в левой части уравнения 6^x, а в правой части – 2^x. Получим уравнение $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ ⇔ $6^x = 2^x$.

Так как $2^x >0$ при всех x, можно обе части этого уравнения разделить на 2^x, не опасаясь при этом потери решений. Получим $3^x = 1$⇔ x = 0.

Ответ: 0.

3) Метод введения новой переменной

используется в случае, когда после упрощения обеих частей уравнения появилась возможность обозначить какую-то степень другой переменной и, при этом, все остальные степени также будут выражаться через введённую переменную.

Например, $4^x+8=6\cdot2^x$

Перенесем все слагаемые в левую сторону, представим 4^x как $(2^x)^2$ (по свойству степеней)

$$(2^x)^2-6\cdot2^x+8=0$$

Введём новую переменную: $2^x=t,\ t>0$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-6t+8=0$$

Решаем получившееся квадратное уравнение , получим $t_1=2$, $t_2=4$
Делаем обратную замену, подставив в уравнение $2^x=t$ значения $t_1=2$ и $t_2=4$
Получим два уравнения, каждое из которых решим.

1) $2^x=2$;	2) $2^x=4$;
$2^x=2^1$;	$2^x=2^2$;
$x=1$	$x=2$

Ответ: 1; 2.

Упражнения для самостоятельного решения:

10.7. а) $3^{x^2-4,5}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{27}$; в) $\sqrt{2^{-1}}\cdot 2^{x^2-7,5}=\frac{1}{128}$;
б) $0,5^{x^2-5,5}\cdot\sqrt{0,5}=32$; г) $0,1^{x^2-0,5}\cdot\sqrt{0,1}=0,001$.

10.8. а) $2^x\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{1}{9}$; в) $5^x\cdot 2^x=0,1^{-3}$;
б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x\cdot 3^x=\sqrt{\frac{27}{125}}$; г) $0,3^x\cdot 3^x=\sqrt[3]{0,81}$.

10.9. а) $3^x-3^{x+3}=-78$; в) $2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7}-7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8}=49$;
б) $5^{2x-1}-5^{2x-3}=4,8$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{5x}=\frac{4}{9}$.

10.10. а) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x-6=0$;
б) $3^{2x}-6\cdot 3^x-27=0$; г) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}+5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x-6=0$.

10.11. а) $2\cdot 4^x-5\cdot 2^x+2=0$;
б) $3\cdot 9^x-10\cdot 3^x+3=0$;
в) $4\left(\frac{1}{16}\right)^x+15\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x-4=0$;
г) $(0,25)^x+1,5\cdot(0,5)^x-1=0$.

Решите уравнение:

10.1 а) $3^x=9$; в) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=1$;
б) $2^x=16$; г) $0,5^x=0,125$.

10.2. а) $4^x=\frac{1}{16}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^x=36$;
б) $7^x=\frac{1}{343}$; г) $0,2^x=0,00032$.

10.3. а) $10^x=\sqrt[4]{1000}$; в) $0,3^x=\sqrt[4]{0,0081}$;
б) $5^x=\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25\sqrt{5}$.

10.4. а) $0,3^x=\frac{1000}{27}$; в) $0,7^x=\frac{1000}{343}$;
б) $\left(\frac{4}{5}\right)^x=\frac{25}{16}$; г) $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{16}{81}$.

10.5. а) $2^{x+1}=4$; в) $0,4^{4-5x}=0,16\sqrt{0,4}$;
б) $5^{3x-1}=0,2$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}=8\sqrt{2}$.

10.6. а) $3^{-1-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7}=6^{x-3}$;
б) $6^{2x-8}=216^x$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8x+1}=1,5^{2x-3}$.

Уровень 1 № 10.1-10.6 (а, б)

Уровень 2 № 10.7(а, б)

№ 10.9 (а, б)

Уровень 3 № 10.10 (а, б)

№ 10.11 (а, б)

Критерии оценки: Уровень 1-«3»; уровень 1,2-«4»; уровень 1-3-«5».

Внимание!!!! При решении следует использовать свойства степеней.

$$1)\ a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

$$2)\ a^m:a^n=a^{m-n}$$

$$3)\ (a^m)^n=a^{m-n}$$

$$4)\ (ab)^n=a^nb^n$$

$$5)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

И пять формул, записанных на обложке тетради:

$$a^0=1$$

$$a^1=a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

а также таблицу степеней

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 10

	1^n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n	10^n
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000
5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049	100000
6	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441	1000000
7	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969	10000000
8	1	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721	100000000
9	1	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489	1000000000
10	1	1024	59049	1048576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401	10000000000

Материалы направлять по адресу: nadezda_boldova@mail.ru