

Тема 1.

Решение тригонометрических уравнений.

Указания к выполнению работы. Прочитайте теоретическую часть. Рассмотрите примеры решений уравнений. Выполните упражнения для самостоятельного решения. Решенные уравнения пришлите для проверки.

Не забывайте писать ответ после каждого решенного уравнения !

Теоретическая часть.

Простейшие тригонометрические уравнения — это уравнения следующих видов:
 $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — это значит описать множество значений переменной x , для которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение a .

Решение любого тригонометрического уравнения сводится, как правило, к решению одного или нескольких простейших тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения (формулы).

1. $\sin x = a$, $|a| \leq 1$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$\sin x = -1$$

$$\sin x = 0$$

$$\sin x = 1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2. $\cos x = a$, $|a| \leq 1$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$\cos x = -1$$

$$\cos x = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3. $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$

$$x = \pm \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Примеры решения уравнений.

1) Решить уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$ Решение: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2},$ $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$ $x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ Ответ: $\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	2) Решить уравнение $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$. Решение: Используя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получаем $2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$ $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ Обозначим $\cos x = y$ $2y^2 - y - 1 = 0$ $y_1 = 1; y_2 = -\frac{1}{2}$ а) $\cos x = 1$; $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ Ответ:
---	---

	$2\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
3) Решите уравнение: $3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$, $3 \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0$, $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$, Пусть $\sin x = t$, где $t \leq 1$. Получим квадратное уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$, $D = 9 + 16 = 25$. $t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$ Таким образом $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $t \leq 1$. Значит $\sin x = \frac{1}{2}$. Поэтому $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	4) Решите уравнение: $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$. <u>Решение.</u> Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$ Получаем: $\tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0$. Вместо $\tan x$ введем новую переменную z и получим квадратное уравнение: $z^2 - 3z + 2 = 0$. Найдем корни: $z_1 = 1$ $z_2 = 2$. Значит: либо $\tan x = 1$, либо $\tan x = 2$. Сначала найдем x при $\tan x = 1$: $x = \arctg 1 + \pi n$. $x = \pi/4 + \pi n$. Теперь найдем x при $\tan x = 2$: $x = \arctg 2 + \pi n$. <u>Ответ:</u> $x = \pi/4 + \pi n$; $x = \arctg 2 + \pi n$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решите уравнения:

а) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

б) $3 \tan^2 x + 2 \tan x - 1 = 0$.

в) $2 \cos(3x - \pi/4) = -\sqrt{2}$.

г) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$

Материалы направлять по адресу : nadezda_boldova@mail

Тема 2.

Решение логарифмических уравнений.

Указания к выполнению работы. Прочитайте теоретическую часть. Рассмотрите примеры решений уравнений. Выполните упражнения для самостоятельного решения (по три уравнения из каждого задания)

Не забывайте писать ответ и проверку корней!

Теоретическая часть.

Уравнения, в которых неизвестное находится под знаком логарифма, называются *логарифмическими*.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $u > 0$, $v > 0$. Если $\log_a u = \log_a v$, то $u = v$.

Доказательство: воспользовавшись основным логарифмическим тождеством и условием, получим: $u = a^{\log_a u} = a^{\log_a v} = v$.

При решении логарифмических уравнений обязательно учитывается область определения логарифма.

Если область определения найти сложно, можно проверить полученные корни подстановкой в уравнение.

Примеры решения уравнений по определению логарифма

Пример 1. Решите уравнение $\log_2 x = 2$.

Решение. По определению логарифма имеем $x = 2^2 = 4$.

Число 4 входит в область определения, следовательно, является корнем данного уравнения.

Ответ: 4

Пример 2. Решите уравнение $\log_2 (x - 1) = 2$.

Решение. По определению логарифма имеем $x - 1 = 2^2$. Отсюда $x = 3$.

Число 3 входит в область определения, следовательно, является корнем данного уравнения.

Ответ: 3

Пример 3. Найдите корень уравнения $\log_3 (x - 1) = 4$.

Решение. По определению логарифма получаем: $x - 1 = 3^4 \Leftrightarrow x - 1 = 81 \Leftrightarrow x = 82$. Число 82 входит в область определения ($82 - 1 > 0$), следовательно, является корнем уравнения.

Ответ: 82

Пример 4. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) = -3$.

Решение. Последовательно получаем: $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) = -3 \Leftrightarrow x - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow x - 1 = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 27 \Leftrightarrow x = 28$. Число 28 входит в область определения ($28 - 1 = 27 > 0$), значит, является решением уравнения.

Ответ: 28

Пример 5. Найдите корень уравнения $\lg(2x - 4) = 2$.

Решение. По определению логарифма получаем: $2x - 4 = 10^2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 100 \Leftrightarrow x = 52$. Число 52 входит в область определения ($2 \cdot 52 - 4 = 100 > 0$), следовательно, является корнем уравнения.

Ответ: 52

Пример 6. Решите уравнение $\log_3 (x^2 - 2x) = 1$.

Решение. По определению логарифма имеем $x^2 - 2x = 3$.

$x^2 - 2x - 3 = 0$. $D = 16$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению. **Ответ:** 3; -1

Упражнения для самостоятельного решения.

Задание 1. Решите уравнение:

1) $\log_3 x = 3$

2) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$

3) $\log_6 x = 3$

4) $\log_2 x = 0$

5) $\log_2 (-x) = -5$

6) $\log_{27} x = \frac{1}{3}$

7) $\log_4 x = -2$

8) $\log_5 x = -3$

9) $\log_5 x = 1$

10) $\log_{\frac{1}{2}} (-x) = -1$

Задание 2. Решите уравнение:

1) $\log_4^1 (2x - 1) = 1$

2) $\log_2^1 (2x - 4) = -2$

3) $\log_3^1 (4x + 5) = -1$

4) $\log_2 (3 - x) = 0$

5) $\log_2^1 (3x - 5) = -1$

6) $\lg(4x - 11) = 0$

7) $\log_5 (4x - 3) = 2$

8) $\log_4 (6x - 1) = 1$

9) $\log_{0,3} (5 + 2x) = 1$

10) $\log_6 (2x + 6,5) = 1$

Тема 3.

Решение логарифмических уравнений.

Указания к выполнению работы.

1.Посмотрите учебное видео.

<https://youtu.be/-ODgQ9qCr8Q>

<https://youtu.be/ajH-omnZmx4>

https://youtu.be/Q3q8VnWoPUI?list=PLowFPHQVq5qP3jN1AbeLIPfrB5va2O_hZ

2. Выполните упражнения для самостоятельного решения.

Не забывайте писать ответ и проверку корней!

Критерии оценки:

Уровень 1- «3»;

уровень 1,2-«4»;

уровень 1,2,3-«5»

Упражнения для самостоятельного решения.

Уровень 1

а) $\log_{1/2} (2x-5) = -1$

б) $\log_7 (x^2-2x-8) = 1$

Уровень 2

Решите уравнение:

а) $\log_{12} (x^2-8x+16) = 0$

б) $\log_2 (x^2-4x+4) = 4$

Уровень 3

Решите методом замены переменной уравнение:

а) $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$

б) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$

Материалы направлять по адресу: nadezda_boldova@mail.ru